



TITLE:

# 気泡流体中での強い衝撃波の伝播 (流体の非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

吉永, 隆夫

---

CITATION:

吉永, 隆夫. 気泡流体中での強い衝撃波の伝播(流体の非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1995, 908: 94-102

ISSUE DATE:

1995-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59499>

RIGHT:

# 気泡流体中での強い衝撃波の伝播

阪大・基礎工

吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)

## 概要

気泡流体で満たされた鉛直衝撃波管を用いて衝撃波の伝播が実験的に調べられた。媒質の分散性のため、通常の衝撃波の代わりに波頭後方に振動波列を伴う振動衝撃波が現れる。弱い衝撃波の場合、管内での気泡分布の非一様性のため波頭後方の振動波列は不規則になるが、波形の重ね合わせによりその影響は取り除かれる。一方、強い衝撃波の場合、振動波列に現れる不規則さは、気泡分布のみならず、非線形性が大きな原因と考えられる。このような非線形性による効果を、異なる波形間の位相空間における距離（セパレーションディスタンス）の時間発展として表すことができ、強い衝撃波の不規則な振動波列はカオス現象であると予想される。

## 1 まえおき

気泡流体中での波の伝播に関する研究は、技術・工学への応用のみならず、個々の気泡の運動と流体中での波の伝播というスケールの異なる現象の間での関係を明らかにする上で重要である。よく知られているように、気体と液体の大きな密度差のために、気泡流体中での波の速度（位相速度）は一般に液体または気体だけから成る相での速度に比べて小さい。また、小振幅波の伝播においては、周波数が増加（波数が減少）するに従ってその振幅と位相速度が減少することから、気泡流体中では分散と散逸の両方の効果を受けることがわかる [1]。さらに、振幅が大きくなると、このような効果に加えて非線形性による効果が現れ、波動現象はより複雑になることが予想される。しかし、このような場合でも非線形性が弱ければ小さな振幅領域での波の伝播が比較的簡単な発展方程式で記述でき、衝撃波や孤立波の伝播に関しては実験結果と比較的良く一致することが報告されている [2,3,4,5,6]。

最近、気泡振動または気泡流体中での波動の強い非線形挙動が幾人かの研究者により調べられた。Lauterborn 等 [7,8] は、周期的に駆動された圧力場における単一気泡の運動を調べ、駆動振幅が増加するにつれて周期倍加ルートを通じてカオス現象が観察されることを実験及び数値計算により示した。一方、気泡流体中での強い衝撃波の不規則な挙動が鉛直衝撃波管を用いて調べられている。Nigmatulin 等 [9,10] は、ある条件の下では振動衝撃波が局所的に異常に増幅されることを観察し、さらに Beylich 等 [5,6] は、大きな振幅領域で衝撃波波頭後方で不規則（カオティック）な波の振る舞いがみられることを報告している。ところで、上で述べた単一気泡と気泡流体中での不規則な現象に関して、以下に示すような本質的な違いがあることを注意しておく：

1. 前者は気泡の非線形振動であり、後者は多数の気泡の集合的運動の結果として得られた非線形波動現象である。

2. 前者におけるカオティックな振る舞いは気泡の自然（共鳴）振動数付近で発生しているのに対して、後者の場合は比較的低い振動数（長波長）において観察されている。

かくして、気泡流体中での不規則現象を引き起こす要因は、単一気泡の場合のように気泡振動の非線形性だけでは説明できない。

そこで本研究では、気泡流体中での強い衝撃波の伝播実験を行うことにより、衝撃波波頭後方に現れる不規則な振動波列と衝撃波の強さの間にどのような関係があるかを調べた。特に、実験で観察される不規則現象が、衝撃波管中での気泡の非一様な分布にもよることから、非線形性がどの程度不規則現象に寄与しているかを明らかにする必要がある。そのため、ほぼ等しい条件の下で観測された二つの圧力波形間の距離を位相空間内で測る‘セパレーションディスタンス’を用いることを試み、非線形性による不規則（カオス）現象発生を示す定性的な指標とした。

## 2 弱非線形理論

非線形性が弱くかつ気泡分布が一様である場合、適当な近似の下では気泡流体中を伝播する波が K-dV 型の方程式で記述されることが知られている。以下では、簡単のため気泡は均一に分布し、気泡の速度 ( $v_g$ ) と回りの流体の速度 ( $v_\ell$ ) が等しい（相対運動がない）と仮定する。また、液体の粘性 ( $\mu_f = 0$ ) を無視し、ボイド率（単位体積の気泡流体中で気体が占める割合： $\alpha$ ）が十分小さい ( $\alpha \ll 1$ ) とする。特に、運動方程式では気体部分の慣性項は無視され、圧力項は無限液体中での単一の気泡の運動を記述する Rayleigh-Plesset 方程式で与えられるとする ‘Wijngaarden のモデル’ [2] を用いる。そのとき、基礎方程式は以下で与えられる；

液相及び気相に対する連続の式：

$$\partial_t(1 - \alpha)\rho_\ell + \partial_x(1 - \alpha)\rho_\ell v_\ell = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t\alpha\rho_g + \partial_x\alpha\rho_g v_g = 0, \quad (2)$$

液相に対する運動方程式：

$$(1 - \alpha)\rho_\ell(\partial_t v_\ell + v_\ell \partial_x v_\ell) = -\partial_x P, \quad (3)$$

Rayleigh-Plesset 方程式：

$$P_g = P + \rho_\ell R R_{tt} + (3/2)\rho_\ell R_t^2, \quad (4)$$

等温条件及び気泡質量の保存：

$$P_g/\rho_g = \text{const.}, \quad (5)$$

$$\rho_g V_g = \text{const.}, \quad (6)$$

ここで,  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ ,  $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ ,  $\dot{\phantom{x}} \equiv d/dt$  であり, 気泡の体積  $V_g$  は気泡の半径  $R(t)$  を用いて  $V_g = 4\pi R^3/3$  で与えられる。また,  $\alpha \ll 1$  に対して気泡流体の密度は  $\rho = \alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_\ell \simeq (1-\alpha)\rho_\ell$  と近似される。かくして, 問題は6個の未知変数  $\alpha, \rho_g, v_g (= v_\ell), R, P, P_g$  に関して上に示された6個の方程式を解くことに帰着される。

まず線形分散関係式を得るために, 各従属変数の一定状態  $\alpha_0, \rho_0, R_0, P_0$  からの差が微小で, これらが以下のように正弦的に変化すると仮定する:

$$\alpha - \alpha_0, \rho_g - \rho_0, R - R_0, P - P_0, P_g - P_0, v_g (= v_\ell) \propto \exp(i[kx - \omega t]).$$

そのとき, 上記の諸量を基礎方程式 (1)~(6) に代入して, 微小量の2次以上の項を無視すれば整合条件より以下の分散関係を得る:

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 (1 + c_0^2 k^2 / \omega_B^2)^{-1}, \quad (7)$$

ここで, 音速  $c_0 = \sqrt{(P_0/\rho_0)[1 + 2\alpha(1-\alpha)]/[\alpha(1-\alpha)]}$  であり, 共鳴遮断周波数は  $\omega_B = \sqrt{3P_0/(\rho_0 R_0^2)}$  として与えられる。長波長領域 ( $k \ll \omega_B/c_0$ ) で, 分散関係式は  $\omega \sim c_0 k - c_0^3 k^3/(2\omega_B^2) + \dots$  と近似できるので,  $\omega \leftrightarrow -i\partial/\partial t$ ,  $k \leftrightarrow i\partial/\partial x$  の関係を用いれば以下の線形 K-dV 方程式を得る:

$$\partial_t P + c_0 \partial_x P + c_0^3/(2\omega_B^2) \partial_x^3 P = 0. \quad (8)$$

さらに, 変数変換  $\xi = x - ct$ ,  $\tau = t$ , 及び大気圧  $P_0$  による無次元変動圧力  $p = (P - P_0)/P_0$  を導入し, これまで無視されていた, 非線形性と分散の効果を適当な時空間スケールで考えると, 以下に示すような散逸項を含む K-dV 方程式が得られる:

$$\partial_\tau p + p \partial_\xi p + \beta \partial_\xi^3 p - R(p) = 0, \quad (9)$$

以下に示される散逸項  $R(p)$  が考えられる:

- (i) 粘性散逸 [2,3,4]:  $R(p) = \mu_f \partial^2 p / \partial \xi^2$ ,
- (ii) 熱散逸 (等温的) [2,3,12]:  $R(p) = \mu_t \partial^2 p / \partial \xi^2$ ,
- (iii) 熱散逸 (断熱的) [11,12]:  $R(p) = \mu_t \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial p / \partial \zeta}{\sqrt{|\xi - \zeta|}} d\zeta$ ,

ここで, (i) は気泡に働く周囲の流体による粘性の効果, (ii) は気泡内での温度境界層厚さが気泡半径に比べて十分大きい場合, (iii) は温度境界層厚さが非常に短い場合の熱散逸効果を示す。

実験では流体の粘性が気泡の運動に対してのみ働き, 気泡内での温度変化が等温的と見なせるような場合を取り扱うので,  $R(p)$  は (i) と (ii) で与えられ, (9) 式は K-dV-Burgers 方程式となる。よく知られているように, この式で散逸係数  $\mu (= \mu_f + \mu_t)$  が分散係数  $\beta$  に比べて十分大きくなければ, 位相面  $(p, dp/d\tau)$  上で鞍部点から渦巻点へ至る特徴的な解軌道として与えられる振動波列を伴う定常衝撃波解が存在する [13]。このように, 弱い非線形性, 散逸性及び分散性の下では定常衝撃波解が存在可能であり, 2次元位相平面に

よりその特徴的な解の振る舞いが示せる。しかし、非線形性が強くなった場合、(9)式で分散及び散逸の高次微分の項を考慮する必要がでてくるであろう。このような場合、仮に定常解があるとすれば、さらに高次元（少なくとも3次元以上）の位相空間での解軌道を考えることにより解の特徴的な振る舞いをとらえることができる。今回の実験で観察される現象が必ずしも定常的であるとはいえないが、次節ではこのような観点に立って、実験結果を3次元の位相空間で考える。

### 3 実験

#### 3.1 実験装置

実験は図1に示すような通常の鉛直衝撃波管を用いて行われた。衝撃波管は低压管(L)と高压管(H)からなり(内径56mm)、その間は隔膜(D)で仕切られている。低压管は隔膜より僅かに下方までグリセリン水溶液( $C_3H_8O_3$ , 85%)で満たされている。ほぼ一定の大きさの気泡(半径 $R_0 \sim 1\text{mm}$ )の分布を作り出すように42本の細管( $\phi=0.2\text{mm}$ )からなる気泡発生器(B)により気泡が管底から液中に放出される。一方、窒素ガス( $N_2$ )が高压管に注入され、必要とされる強さの圧力ステップを得ることができるように圧力が適当に調節される。衝撃波は放電キャパシタ(C)(200V, 600 $\mu\text{F}$ )により熱せられたワイヤー(Ni)で隔膜(Mylar:厚さ0.06~0.4mm)を溶かして破ることにより発生させられる。隔膜が破れた後、衝撃波が管内の気泡流体中を伝播するが、その波形の時間発展が低压管内の数カ所(#1~#4, #2', #4')に取り付けられた圧力センサー(PCBとKistler)を通してトランジェントデータレコーダー(T)(4ch, 2K words メモリー)に記録される。気泡は管内を十分ゆっくり(数十センチ/秒)上昇するので、気泡がほぼ球形を保っていると考えられる。一方、気泡に用いるガスとしては、ほぼ等温変化(比熱比 $\gamma_0 \sim 1.07$ )を示す六フッ化硫黄ガス( $SF_6$ )が用いられた。

#### 3.2 実験結果

#1から#4の位置にある各圧力センサーで測定された典型的な衝撃波の伝播例を図2に示す。(a)図(#1)では入射圧力ステップが約0.5barの場合で、後方には入射振幅にほぼ等しい大きさの反射波が重なって現れている。このことは、気体の音響インピーダンス( $\rho_g c_g$ )に対して気泡流体のそれ( $\rho c$ )が十分大きい( $\rho_g/\rho \sim 10^{-3}$ ,  $c_g \sim c$ )ため、衝撃波は液面でほぼ完全反射されていることを示している。その結果、入力衝撃波とほぼ等しい大きさの圧力波が気泡流体中を伝播すると考えられる。一方、(b)(#2), (c)(#3)そして(d)(#4)図では、気泡流体中での衝撃波の発展の様子が示されている。これらの図から、分散性のため波頭後方に振動波列が現れていることがわかる。さらに、(c), (d)図では波列は成長し、波頭に近い領域では振幅の大きな波ほど速く伝播していることがわかる。このことは図3からもわかる。図はボイド率 $\alpha$ を0.1%としたときに、衝撃波の波頭振幅とその伝播速度の関係が示されている。図より振幅が大きくなるほど非線形性により伝播速度は大きく、さらに微小振幅波の場合その伝播速度は液体または気体相だけからなる場合の速度よりも小さいことがわかる。

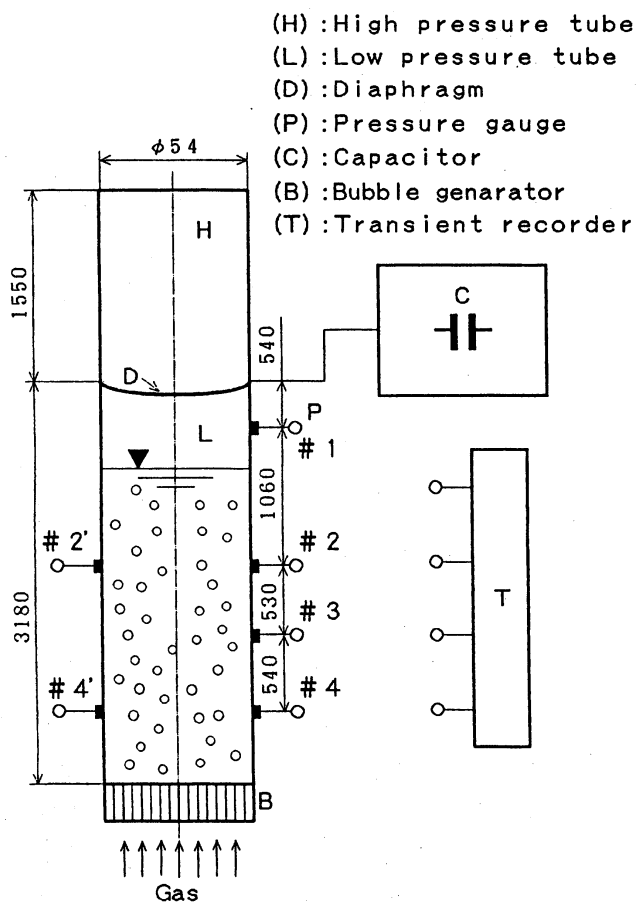


図 1: 実験装置の概略図.

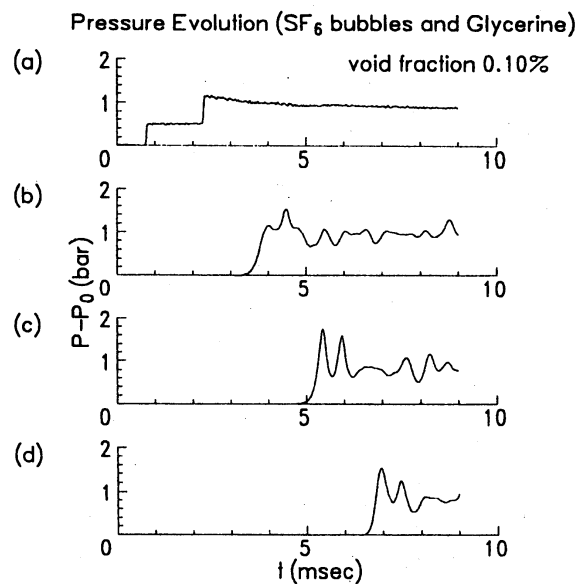


図 2: 管内を伝播する衝撃波: (a), (b), (c), (d) 図はそれぞれ # 1, # 2, # 3, # 4 での観測結果を示す.

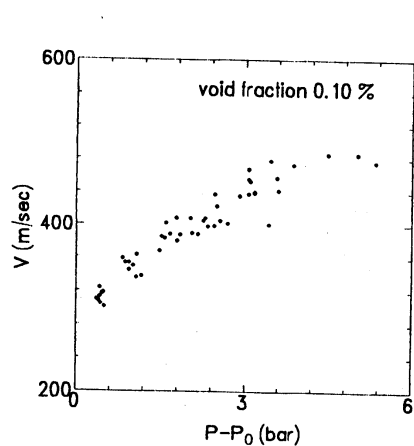


図 3: 衝撃波波頭振幅と伝播速度の関係.

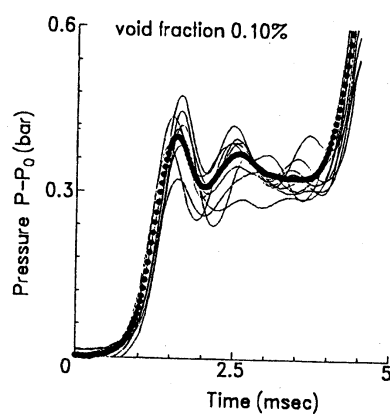


図 4: # 4 で観測された衝撃波波形 (細線) と重ね合わせにより得られた平均波形 (点線).

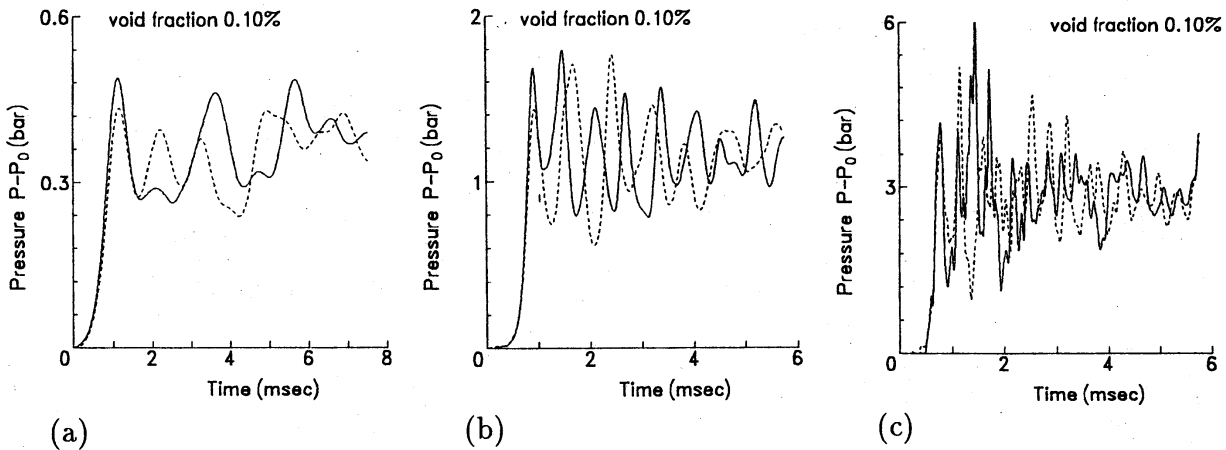


図 5: # 2 で観測された衝撃波波形の比較 (実線と波線): (a)  $P - P_0 = 0.4\text{bar}$ , (b)  $P - P_0 = 1.2\text{bar}$ , (c)  $P - P_0 = 3.0\text{bar}$ .

図 4 は、測定点 # 4 で複数回の実験により得られた比較的振幅の小さい場合の衝撃波の波形 (細線) とそれらの重ね合わせ平均 (点線) を示している。図よりわかるように各測定で観測される波頭後方での振動波形は不規則であるが、平均された波形は減衰振動波列を示している。このことは、気泡分布の非一様性が波頭後方での振動波列に強く影響を及ぼすが、適当な平均操作により得られた結果は K-dV-Burgers 方程式での定常波解と定性的に一致することを示している。事実、管内での気泡の上昇速度 (数十センチ/秒) は衝撃波の伝播速度に比べて無視できるのに対して、管内での気泡分布は気泡発生器ごく付近を除いては一様ではない。従って、実験では衝撃波伝播に対する気泡分布の空間非一様性の影響を避けることはできない。しかし、振幅が大きくなるにつれて、このような平均操作によっても不規則現象を抑えることは難しくなる。もっとも、不規則な現象が非線形性によるものであれば、このような平均はあまり意味をなさない。

図 5 では代表的な 3 種類の強さの衝撃波の # 2 での測定結果を示す。ここで (a), (b), (c) 図はそれぞれ入射圧力  $P - P_0$  を 0.4, 1.2, 3.0 bar とし、各圧力に対して測定された波形の適当な二つを比較のために示している。いずれの圧力の場合も、波形は互いに異なり、かつ波頭後方では不規則である。衝撃波が強くなるにつれてこの不規則性はさらに強く、かつ周波数の高い波が現れてくる。一方、図 6 では同様な入射圧力 ( $P - P_0 = 0.4, 1.2, 3.0\text{bar}$ ) に対して、衝撃波管内の向かい合った 2 点 (# 2, # 2') での波形を比較している。図よりわかるように、入射圧力が大きくなるにつれて短波長の波が発生し、両波形間での違いが大きくなることから、強い衝撃波伝播において一次元近似が悪くなると考えられる。

上で示された図 5 と図 6 からだけでは、不規則さが気泡の非一様な分布によるのか非線形性によるのか区別できない。そこで、これらの波形の位相平面上での振る舞いについて考えてみる。そのために、 $T = 0.36\text{ms}$  ( $= 1/\omega_B$ ),  $P_0 = 1\text{bar}$ ,  $L = 56\text{mm}$ ,  $R_0 = 1\text{mm}$ ,  $\rho_0 = 1\text{g/cm}^3$  として規格化  $\tau = t/T$ ,  $p = (P - P_0)/P_0$  を行う。さらに、以下で定義される 3 次元位相空間内の二つの軌道間の距離を測るセパレーションディスタンス  $D(\tau)$  を導入する:

$$D(\tau) = \sqrt{(\Delta p)^2 + (d\Delta p/d\tau)^2 + (d^2\Delta p/d\tau^2)^2}, \quad (10)$$

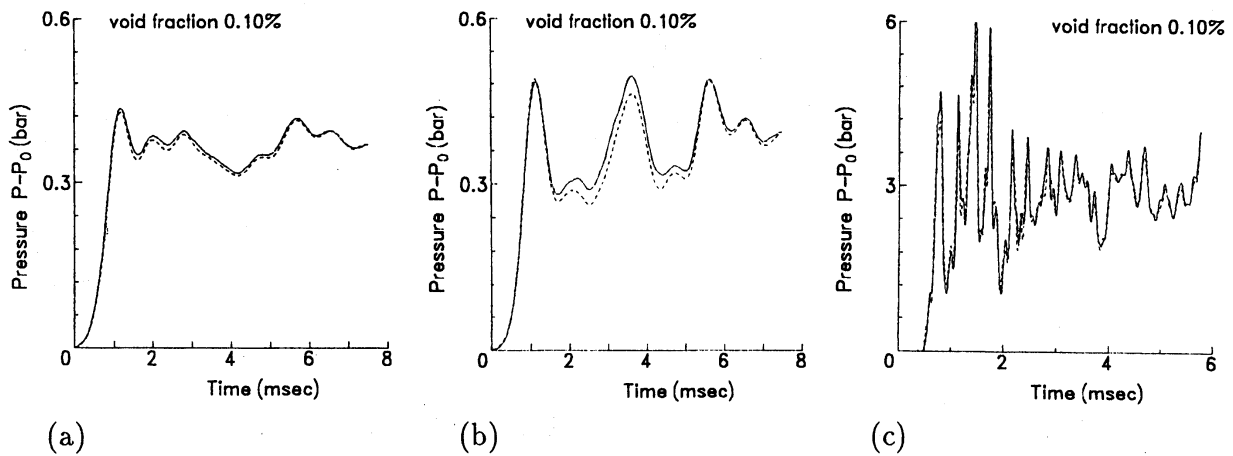


図 6: # 2(実線) と # 2'(波線) で観測された衝撃波波形の比較: (a)  $P - P_0 = 0.4 \text{ bar}$ , (b)  $P - P_0 = 1.2 \text{ bar}$ , (c)  $P - P_0 = 3.0 \text{ bar}$ .

ここで、 $\Delta p \equiv |p_a - p_b|$  は適当な 2 点 a, b 間での圧力差である。上式で初期に隣接した軌道間の距離  $D(\tau)$  が  $\tau$  とともに指数的に増大すれば、二つの波形の間で相関がなくなりカオティックになると考えられる。

図 7 に、図 5 で示した波形発展に対する  $D(\tau)$  が示されている。(a) 図では  $\tau$  の増加に対して  $D(\tau)$  は概ね一定であるのに対して、(b), (c) 図では衝撃波の振幅が大きくなるに従って、 $\tau \sim 5$  付近まで  $D(\tau)$  の増加の割合が大きくなり、以後減少していく様子が見られる。このことは、波頭付近では大きな衝撃波ほど時間の増加とともに互いに相関がなくなることを意味する。このような事情は、図 6 に対する  $D(\tau)$  を示した図 8 の場合も同様である。ここでは、管内の向かい合った 2 点のそれぞれで得られた  $D(\tau)$  が同様な傾向を示し、強い衝撃波になるほど大きく増加している様子がみられる。

このように、弱い衝撃波に対しては気泡の非一様な分布にもかかわらず、 $D(\tau)$  は殆ど変わらない。このことは異なる衝撃波の間での相関が非常に強いと考えられる。これに対して、強い衝撃波の場合、個々の波形はもちろん異なっているが、波頭及びそれに近い不規則な振動波列部に限れば  $D(\tau)$  は  $\tau$  とともに急激に（指数関数的）に大きくなっていく。このことは、強い衝撃波の場合、お互いに相関が非常に低いことを示しており、カオスであるための一つの必要条件となりうる。

## 4 結論

以上得られた結果をまとめて結論とする：

1. 弱い衝撃波の場合、波長の長い振動波列が観察されるのに対して、強い衝撃波の場合、短波長の振動波列と局所的に異常に大きな振幅の波が現れる。
2. 波頭後方での不規則な振動波列に対する非一様な気泡分布の影響は、非線形性が弱い場合、測定波形の波の重ね合わせによる平均で取り除くことができる。しかし、



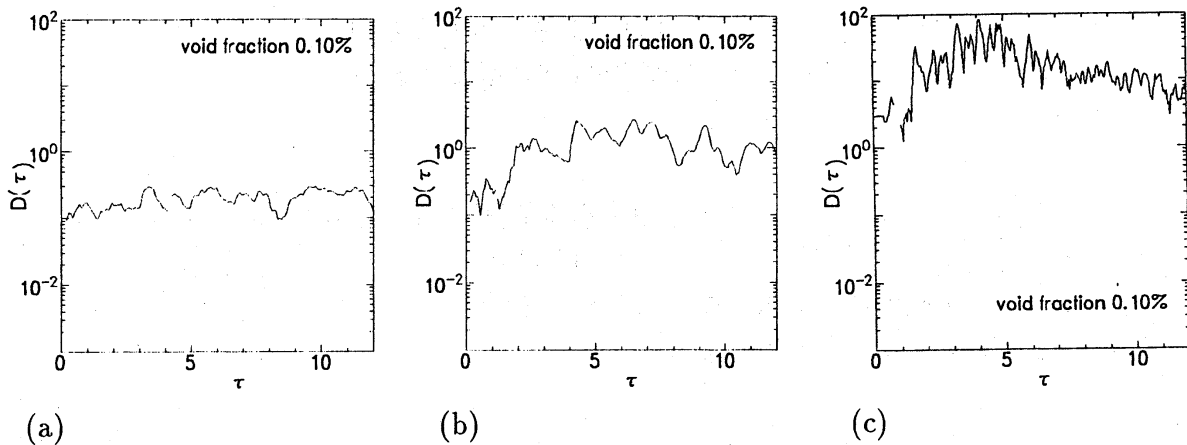


図 7: # 2 でのセパレーションディスタンス  $D(\tau)$ : (a), (b), (c) はそれぞれ図 5(a), (b), (c) で示された波形発展に対応する。

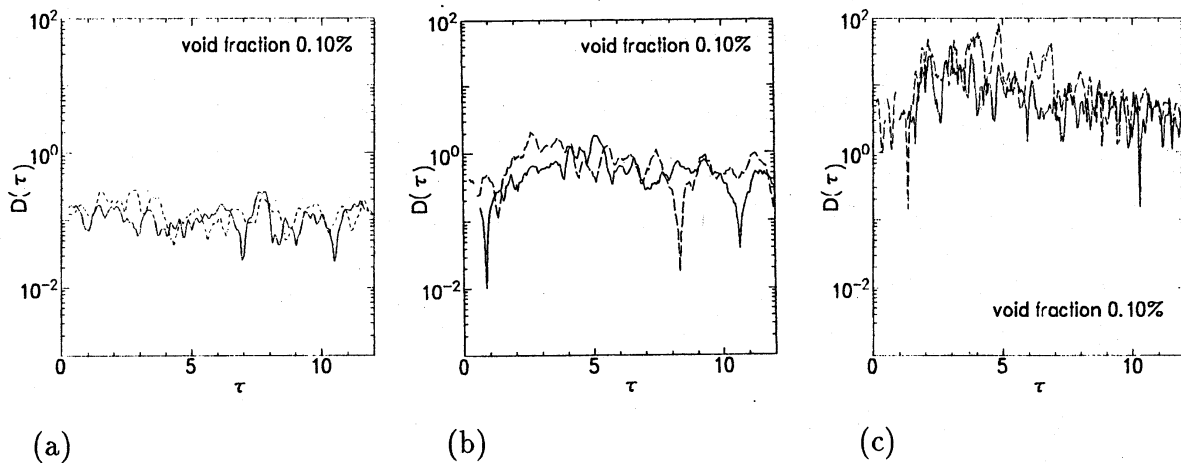


図 8: # 2 (実線) と # 2' (波線) でのセパレーションディスタンス  $D(\tau)$ : (a), (b), (c) はそれぞれ図 6(a), (b), (c) で示された波形発展に対応する。

非線形性が強くなるにつれて、重ね合わせだけでは不規則性を取り除くことはできない。

3. 弱い衝撃波の場合、管内の向かい合う 2 点で測定された二つの波形の相違は非常に小さく、平均化された波形間ではその差はさらに縮まる。一方、衝撃波が強くなるにつれて、二つの波形の間で振幅の局所的なピーク及び短波長波の発生において大きな差が現れる。このとき個々の気泡の振動の影響も強く現れているものとみられる。
4. 波頭近傍でのセパレーションディスタンス  $D(\tau)$  の特徴的振る舞いを調べた結果、弱い衝撃波の場合、 $D(\tau)$  の発展はほぼ線形または一定であるのに対して、強い衝撃波の場合、波頭後方付近で急激（指数関数的）に増加する。このことから強い衝撃波において現れる不規則な振動波列は気泡分布によるのではなく非線形によるカオス

現象である可能性が高い。しかしカオスであることをより明確に示すためには、‘セパレーションディスタンス’の空間発展を調べる必要がある。

本研究は、1993～1994年、著者がドイツ学術交流会 (DAAD) 外国人研究者、及び文部省在外研究員としてドイツ・アーヘン工科大 (RWTH・Aachen) で行った研究の一部である。研究施設及び実験装置の使用等において多大な便宜を計っていただいたアーヘン工科大・Beylich 教授に深く感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 例えば、森岡茂樹：気体力学（朝倉書店,1982），混相流体の力学（日本流体力学会編,朝倉書店,1991）。
- [2] L.van Wijngaarden: Ann.Rev.Fluid Mech. **4** (1972) 369.
- [3] V.V.Kusnetsov, V.E.Nakoryakov, B.G.Pokusaev and I.R.Shreiber: J.Fluid Mech. **85** (1978) 85.
- [4] D.S.Drumheller, M.E.Kipp and A.Bedford: J.Fluid Mech. **119** (1982)347.
- [5] A.E.Beylich and A.Gülhan: Phys.Fluids **A2** (1990) 1412.
- [6] A.E.Beylich: *Shock Tubes and Waves*, ed. H.Grönig (VCH,1987)pp.101-115.
- [7] W.Lauterborn and A.Koch: Phys.Rev. **A35** (1987) 1974.
- [8] W.Lauterborn and U.Parlitz: J.Acoust.Soc.Am. **84** (1988) 1975.
- [9] R.I.Nigmatulin: Appl.Sci.Res. **38** (1982) 267.
- [10] R.I.Nigmatulin and A.Gubaidullin: *Nonlinear Waves in Active Media*, ed. J.Engelbrecht (Springer,1989) pp.243-249.
- [11] M.J.Miksis and L.Ting: J.Acoust.Soc.Am. **76** (1984) 897.
- [12] A.Prosperetti: J.Fluid Mech. **222** (1991) 587.
- [13] A.Jeffrey and T.Kakutani: SIAM Rev. **14** (1972) 582.